Yukarıdaki tanımdan yararlanarak $\forall x \in D_f$ noktasındaki türevi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ile ifade edilebilir. Ayrıca $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi

y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $D(f(x))$, y_x, f_x sembollerinden biriyle gösterilir.

Türev tanımını kullanarak verilen bir fonksiyonun türevini hesaplayalım:

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun türevi

Çözüm:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Örnek: $f(x) = x$ fonks. türevi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Örnek: $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ fonksiyonun türevi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \left\{ \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots + \binom{n}{n} h^{n-1} \right\}}{h}$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} = n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

Örnek: $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ $a \in [0, \infty)$ daki türevi

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

O halde $x \in [0, \infty)$ daki türevi

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{dir.}$$

Örnek: $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun türevi

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=1.\cos a=\cos a$$

$\Rightarrow f'(x)=\cos x$ elde edilir.

Benzer şekilde türev tanımı yardımıyla bazı elemanter fonksiyonların türevleri aşağıda verilmiştir.

$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$

$f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=1+\tan^2 x=\sec^2 x$

$f(x)=\cot x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{cosec}^2 x$

$f(x)=\sec x \Rightarrow f'(x)=\sec x\tan x$

$f(x)=\operatorname{cosec} x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{cosec} x\cot x$

$f(x)=\log_a x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$

$f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=a^x.\ln a$, $(a>0, a\neq 1)$

$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

Örnek: $f(x) = x^2 - x - 6$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ deki türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 6 - (-4)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} x + 1 = 3$$

bulunur.

Örnek: $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{x}{x} = -1$$

olup $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ limiti yoktur. Dolayısıyla fonksiyonun $x = 0$ noktasında türevi yoktur.

Bu örnekten sağdan ve soldan limit kavramlarına paralel olarak sağdan ve soldan türev kavramlarını tanımlayabiliriz.

Tanım: Bir a noktasında veya a nın sağ komşuluğunda tanımlanan f fonksiyonu için f nin a noktasındaki sağdan türevi

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ile tanımlıdır.

Yine bir b noktasında veya b nin sol komşuluğunda tanımlı bir f fonksiyonunun b noktasındaki soldan türevi

$$f'(b^-) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

İle tanımlıdır.

UYARI: Bir f fonksiyonunun bir a noktasında türevinin olması için $\Leftrightarrow$

$$f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$$

olmalıdır.

NOT! f fonksiyonu $[a,b]$ de tanımlı bir fonksiyon ise a ve b noktalarındaki türevleri, sırasıyla, f fonksiyonunun a ve b noktalarındaki sağdan ve soldan türevleri olarak tanımlıdır.

Örnek!

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \ x\leq 2 \\ 2x+1 & , \ x>2 \end{cases} \Rightarrow f'(2) \text{ yi bulunuz.}$$

$$f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x+1-5}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

$$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+1-5}{x-2}=\lim_{x\to 2^-} x+2=4$$

$f'(2^+)\neq f'(2^-)$ olup $x=2$ noktasında türevi yoktur. fonksiyon $\mathbb{R}-\{2\}$ de türevlidir.

Tanım! $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x\in A$ için türevlenebilir ise f ye A üzerinde türevlenebilirdir denir. Ayrıca $f': A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyondur.

Teorem! $f: A\to\mathbb{R}$, $g: A\to\mathbb{R}$ iki türevlenebilir fonksiyon olsunlar. $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $f+g$, $f-g$, λf, $f\cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonları da türevlenebilirdir

ve bu türevler aşağıdaki gibidir.

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$
$$(\lambda f)'(x)=\lambda f'(x)$$
$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad , \ g(x)\neq 0$$

Zincir kuralı

Teorem: $f: A \to B$, $g: B \to C$ iki fonksiyon, f $a \in A$ noktasında türevlenebilir, g ise $f(a)$ noktasında türevlenebilir olsun. $g \circ f: A \to C$, a noktasında türevlenebilirdir ve

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

dir.

Örnek: $y = \ln(\cos 3x) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \frac{1}{\cos 3x} \cdot (-3\sin 3x) = -3\tan 3x$$

Örnek: $y = \log_2 (x^2 - 3x + 1) \Rightarrow y' = ?$

Çözüm:

$$y' = \frac{2x-3}{x^2-3x+1} \cdot \log_2 e$$

Örnek: $f(x) = \left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)^4 \Rightarrow f'(x) = ?$

Çözüm:

$$f'(x) = 4\left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)'$$

$$= 4\left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2(1-x^2) + 2x(2x+4)}{(1-x^2)^2}\right)$$